ISSN 0216-2393

Jurnal Gradien Vol.4 No.1 Januari 2008 : 328-332

Pendeskripsian Kontur Dan Image Suatu Kawasan Eksplorasi Menggunakan Monte Carlo Markov Chain

Jose Rizal, Ulfasari Rafflesia

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Indonesia

Diterima 3 Oktober 2007; Disetujui 18 Desember 2007

Abstrak – Artikel ini membahas salah satu dari simulasi bersyarat (*conditional simulation*) yaitu Monte Carlo Markov Chain (MCMC) dalam pendeskripsian kontur dan image. Simulasi ini mengkombinasikan antara simulasi Monte Carlo (mengeneret state awal) dan Markov Chain (pengujian perubahan state). Dalam aplikasi MCMC pada suatu kawasan eksplorasi, terdapat proses pembentukan dan perubahan state untuk setiap iterasinya. Algoritma Metropolis-Hasting digunakan sebagai kriteria pengujian diterima atau tidaknya perubahan state. Sebagai studi kasus, diberikan contoh permasalahan dalam pendeskripsian image dan kontur pada kawasan eksplorasi di lapangan X.

Kata kunci : Simulasi Bersyarat, Monte Carlo Markov Chain, Algoritma Metropolis-Hasting

1. Pendahuluan

Dengan meningkatnya jumlah pertumbuhan manusia untuk setiap tahunnya, akan berdampak pada ketersedian energi-energi yang digunakan manusia dalam seluruh kegiatan aktivitas kehidupan. Dengan keterbatasan cadangan energi dalam suatu kawasan eksplorasi, perlu adanya suatu perencanaan dalam memperluas kawasan eksplorasi atau mencari kawasan eksplorasi yang baru. Dalam pengembangan dan pemilihan kawasan eksplorasi, ahli-ahli pertambangan membutuhkan suatu metoda simulasi stokastik yang dapat memberikan suatu gambaran awal mengenai karakteristik reservoir berupa kontur dan image seakurat mungkin dengan data yang terbatas. Dengan harapan pada lokasi yang telah ditentukan dapat menghasilkan hasil tambang yang optimal.

2. Metode Penelitian

Masalah yang berkaitan dengan proses stokastik muncul dari keinginan peneliti-peneliti untuk membangun dan mengembangkan model-model matematika yang terjadi pada fenomena alam. Proses stokastik sendiri [**3**] adalah koleksi peubah acak $\{S(t), t \in T\}$ yang diberi indeks dengan urutan oleh parameter *t*, dimana *t* berubah-ubah sesuai dengan himpunan indeks *T*.

Definisi [**3**] Suatu proses stokastik dengan indeks parameter kontinu $\{S(t), t \in T\}$, dikatakan proses Markov jika terdapat himpunan n titik waktu $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, maka distribusi bersyarat $S(t_n)$ diberikan $S(t_1), S(t_2), \cdots, S(t_{n-1})$ hanya bergantung pada $S(t_{n-1})$ atau secara notasi:

$$P(S(t_n) \le s_n \mid S(t_1) = s_1, S(t_2) = s_2, \cdots, S(t_{n-1}) = s_{n-1}) = P(S(t_n) \le s_n \mid S(t_{n-1}) = s_{n-1}) \quad (1)$$

Proses Stokastik $\{S_t,\ t \in \mathrm{T}\}$ dikatakan rantai Markov jika distribusi bersyarat keadaan yang akan datang S_{n+1} diberikan keadan sekarang S_n dan keadaan sebelumnya $S_0, \mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \cdots, S_{n-1}$, hanya bergantung dari keadaan sekarang dan bebas dari keadaan sebelumnya. Atau secara formal, proses stokastik $\{S_t,\ t \in \mathrm{T}\}$ dikatakan rantai markov jika memenuhi sifat:

$$\Pr(S_{n+1} \in A | S_n = s, S_{n-1} \in A_{n-1}, S_{n-2} \in A_{n-2}, \cdots S_0 \in A_0) = \Pr(S_{n+1} \in A | S_n = s) \quad (2)$$

untuk semua $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}, A \subset S$ dan $s \in \mathcal{S}$.

Pada kasus ruang indeks $S = \{x_1, x_2, \cdots\}$ diskrit, matriks transisi *P* terdiri dari komponen baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dinotasikan sebagai berikut $P(x_i, x_j)$, yang menyatakan peluang proses transisi ketika pada keadaan x_i kemudian akan berpindah pada x_j. Berikut ini Bila S hanya terdiri dari r+1 komponen, maka matriks transisi P adalah:

$$P = \begin{pmatrix} P(x_0, x_0) & P(x_0, x_1) & \cdots & P(x_0, x_r) \\ P(x_1, x_0) & P(x_1, x_1) & \cdots & P(x_1, x_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(x_r, x_0) & P(x_r, x_1) & \cdots & P(x_r, x_r) \end{pmatrix} \quad (3)$$

dimana :

$$P(x_i, x_j) \geq 0, \forall x_i, x_j \in S$$

dan

$$\sum_{x_j \in S} P(x_i, x_j) = 1 \; \forall x_i \in S$$

$P^n(x_i, x_j)$ didefinisikan sebagai peluang bahwa proses dari keadaan x_i akan berpindah ke keadaan x_j dalam tepat n langkah. Dapat dituliskan untuk suatu $k \geq 0$ berlaku:

$$P^n(x_i, x_j) = \Pr(X_{k+n} = x_j \mid X_k = x_i),\; n \geq 0 \;\; x_i, x_j \in S \qquad (4)$$

dan peluang bahwa proses dari keadaan x_i akan berpindah ke keadaan x_j dalam tepat n+m langkah dapat dihitung dengan menggunakan *persamaan Chapman-Kolmogorov* yang didefinisikan sebagai berikut:

$$P^{n+m}(x_i, x_j) = \sum_{l=0}^{r} P^n(x_i, x_l) P^m(x_l, x_j) \;\; \forall n,m \geq 0, \text{ dan } \forall x_i, x_j \in S \qquad (5)$$

Distribusi marginal tingkat ke-n didefinisikan sebagai vektor baris $\pi^{(n)}$ dengan komponen-komponennya $\pi^{(n)} = \left(\pi^{(n)}(x_0), \cdots, \pi^{(n)}(x_r)\right)$ untuk semua $x_i \in S$, dan $\pi^{(0)}$ disebut distribusi awal dari Rantai Markov. Perhatikan bahwa untuk sebarang $x_i \in S$, berlaku:

1. $\pi(x_i) = \sum_{j=0}^{r} \pi(x_j) P(x_j, x_i)$
2. $\sum_{i=0}^{r} \pi(x_i) = 1$
3. $\pi^{(n)}(x_i) = \sum_{j=0}^{r} P^n(x_j, x_i) \pi^{(0)}(x_j)$

Persamaan di atas (3) dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut:

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n = \pi^{(n-1)} P \qquad (6)$$

Untuk kasus dimana $n \to \infty$ maka $\pi^{(n)}$ akan mendekati π (distribusi stasioner) dan tidak tergantung dari distribusi awal dengan syarat distribusi stasioner π ada dan $\lim_{n\to\infty} P^n(x_i, x_j) = \pi(x_j)$.

a. Monte Carlo Markov Chain (MCMC)

Metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC) [**2**] adalah suatu teknik simulasi yang menggunakan kombinasi antara Simulasi Monte Carlo dan Rantai Markov yang berusaha memecahkan masalah model stokastik yang kompleks dengan cara mensimulasi sebuah barisan bilangan random yang berkorelasi dan membuat suatu kriteria penerimaan atau penolakan dari suatu state (keadaan) menggunakan ***Algoritma Metropolis-Hasting***.

Algoritma Metropolis-Hasting merupakan suatu algoritma yang membangkitkan sebuah Rantai Markov dengan distribusi kesetimbangan π. Langkah-langkah dalam Algoritma Metropolis-Hasting adalah sebagai berikut: Misalkan $X_n = i$ menyatakan image ke-i dalam proses algoritma Metropolis-Hasting, langkah selanjutnya dalam proses simulasi tersebut adalah menerima image ke-i sebagai hasil akhir atau menolak dan melanjutkan proses simulasi untuk mendapatkan image baru. Jadi akan ditentukan image dari X_{n+1} dengan tahapan sebagai berikut [**2**]:

1. Langkah awal

   Membangkitkan sebuah kandidat keadaan j dari keadaan i dengan distribusi $g(j \mid i)$ dengan $i, j = 1,2,\cdots,m$. Dimana $g(j \mid i)$ merupakan suatu distribusi yang tetap dan memiliki sifat-sifat:
   - Jika $g(j \mid i) = 0$ maka $g(i \mid j) = 0$
   - $g(j \mid i)$ adalah suatu matriks transisi dari Rantai Markov *irreducible*
2. Langkah Keputusan (menerima atau menolak)

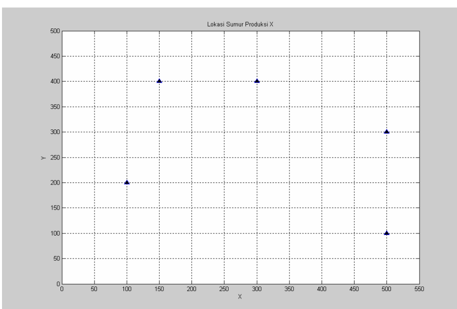
- Misalkan peluang $\alpha(j \mid i) \equiv \min\left\{1, \frac{\pi_j g(i \mid j)}{\pi_i g(j \mid i)}\right\}$,

  dimana $\alpha(j \mid i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$
- $X_{n+1} = j$ dengan peluang $\alpha(j \mid i)$ dan $X_n = i$ dengan peluang 1 - $\alpha(j \mid i)$

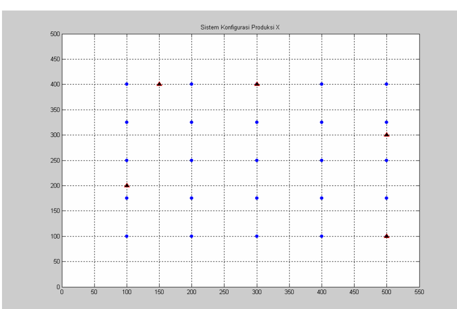
3. Hasil dan Pembahasan

Studi kasus diambil pada lapangan eksplorasi tambang batu bara di lapangan X. Misalkan terdapat lima titik lokasi lapangan batu bara X dengan informasi lokasi titik dan besarnya produksi batu bara yang dihasilkan pada titik tersebut, Lokasi 1 (100,200) produksi 80 ton/hari, Lokasi 2 (150,400) produksi 110 ton/hari, Lokasi 3 (300,400) produksi 95 ton/hari, Lokasi 4 (500,300) produksi 100 ton/hari, dan Lokasi 5 (500,100) produksi 90 ton/hari

Sebagai gambaran awal, kelima data tersebut diplot dalam bidang kartesius untuk mengetahui letak penyebaran data. Berikut ini plot dari kelima data tersebut (Gambar 1),



Gambar 1. Lokasi produksi batu bara



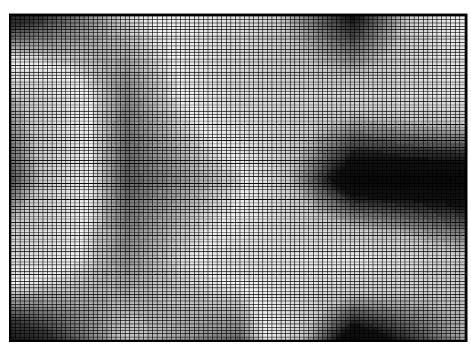
Gambar 2. Konfigurasi sistem

Langkah selanjutnya adalah membuat sistem konfigurasi (Gambar 2) dalam grid-grid yang dikehendaki. Sebagai contoh misalkan sistem konfigurasi tersebut dibagi dalam 25 grid. Setelah konfigurasi sistem dibentuk, langkah selanjutnya memberikan setiap nilai untuk masing-masing grid yang tidak ada nilai produksinya. Seperti tampak pada gambar 2, terdapat dua titik lokasi sumur yang berimpit dengan sistem grid yang dibuat. Yakni koordinat (500,100) dan (300,400). Nilai produksi ini dikondisikan sesuai dengan nilai produksi sesungguhnya yakni 90 ton/jam dan 95 ton/jam. Ini merupakan image awal dari proses Monte Carlo Markov Chain, sebelum dilakukan penukaran pada setiap gridnya.

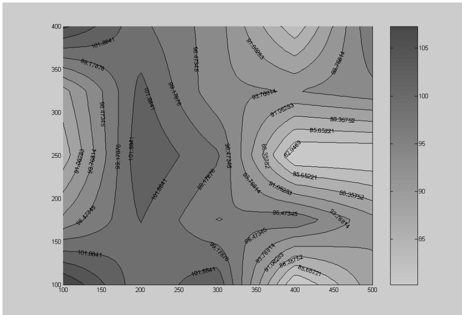
Tabel 1. Nilai produksi X pada awal iterasi

No	Lokasi		Produksi X (ton/jam)
	X	Y	
1	100	100	110.00
2	200	100	99.91
3	300	100	103.92
4	400	100	80.00
5	500	100	90.00
6	100	175	94.47
7	200	175	102.01
8	300	175	96.31
9	400	175	98.60
10	500	175	92.00
11	100	250	86.67
12	200	250	104.30
13	300	250	99.60
14	400	250	80.00
15	500	250	80.00
16	100	325	90.01
17	200	325	102.77
18	300	325	94.40
19	400	325	93.71
20	500	325	95.80
21	100	400	107.90
22	200	400	99.89
23	300	400	95.00
24	400	400	83.68
25	500	400	98.94

Sesuai dengan tahapan yang dijelaskan, hasil output dari iterasi MCMC berikutnya adalah updating image dan bentuk kontur,

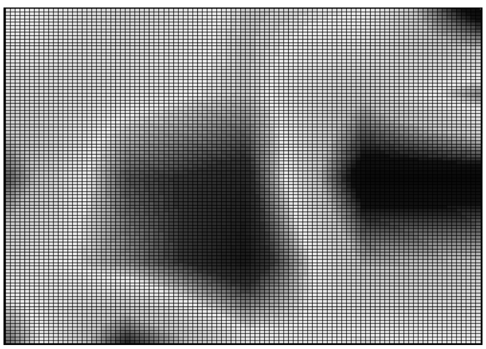


Gambar 3. Image awal iterasi MCMC

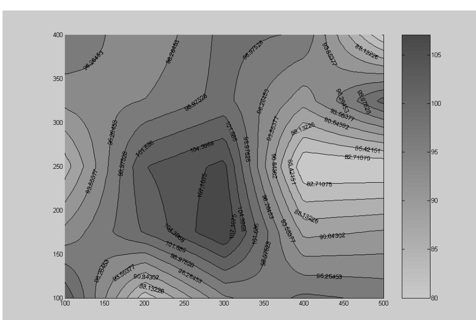


Gambar 4. Kontur awal iterasi MCMC

Proses selanjutnya, melakukan penukaran pada tiap grid sampai dihasilkan suatu konfigurasi sistem yang stasioner. Berikut ini merupakan hasil iterasi kedua dari proses MCMC.

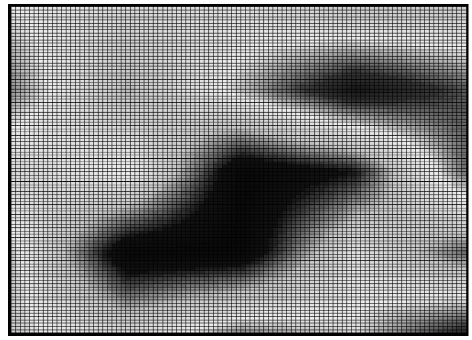


Gambar 5. Image iterasi MCMC kedua

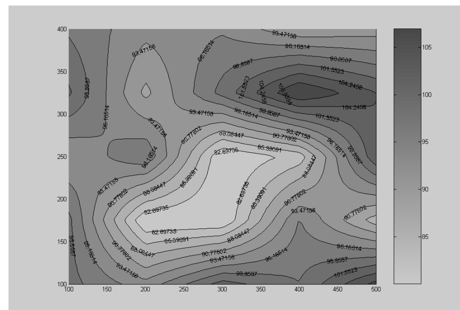


Gambar 6. Kontur iterasi MCMC kedua

Karena kriteria berhenti (stasioner) simulasi belum terpenuhi, proses MCMC dilakukan pada iterasi ketiga dimana terjadi penukaran sebanyak 3850 kali. Berikut ini beberapa out put pada iterasi ketiga.

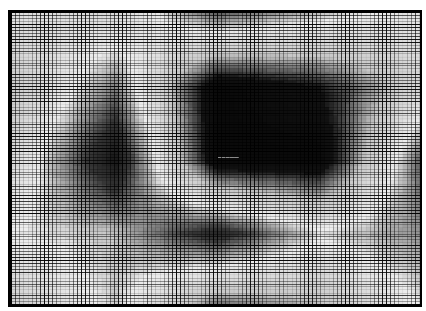


Gambar 7. Image iterasi MCMC ketiga

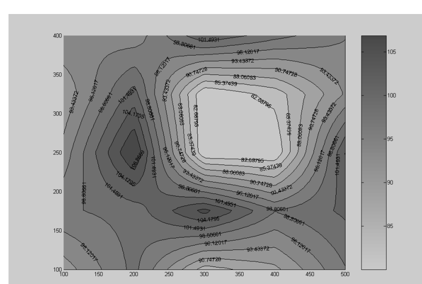


Gambar 8. Kontur iterasi MCMC ketiga

Berikut ini merupakan iterasi keempat dari proses MCMC dimana terjadi penukaran sebanyak 27875 kali. Dan beberapa out put pada iterasi keempat.



Gambar 9. Image iterasi MCMC keempat



Gambar 10. Kontur iterasi MCMC keempat

Tabel 5. Nilai produksi X pada iterasi keempat

No	Lokasi X	Lokasi Y	Produksi X (ton/jam)
1	100	100	9200
2	200	100	9960
3	300	100	8667
4	400	100	9001
5	500	100	9000
6	100	175	9838
7	200	175	9991
8	300	175	10790
9	400	175	9894
10	500	175	10201
11	100	250	9447
12	200	250	11000
13	300	250	8000
14	400	250	8000
15	500	250	10430
16	100	325	9119
17	200	325	10277
18	300	325	8000
19	400	325	8368
20	500	325	9371
21	100	400	9580
22	200	400	10392
23	300	400	9500
24	400	400	9989
25	500	400	9631

Setelah iterasi keempat, hasil simulasi MCMC untuk iterasi selanjutnya memberikan suatu hasil (kontur dan image) yang identik dengan iterasi keempat. Hal ini menandakan konfigurasi sistem pada iterasi keempat sudah stasioner. Jadi konfigurasi pada iterasi keempat merupakan hasil akhir dari proses simulasi MCMC pada kawasan eksplorasi tersebut.

4. Kesimpulan dan Saran

Algoritma Metropolis-Hasting mampu diaplikasikan dalam menghasilkan sebuah deskripsi suatu kawasan eksplorasi berupa image dan kontur suatu parameter kawasan eksplorasi. Tentu saja hasil ini dapat digunakan sebagai bahan pertimbangan dalam pengembangan suatu kawasan eksplorasi tambang.

Salah satu keunggulan yang dimiliki oleh Simulasi bersyarat (Algoritma Metropolis-Hasting) adalah mampu mengatasi keterbatasan data dalam melakukan simulasi guna menghasilkan image dan kontur.

Perlu kajian ilmiah yang lebih dalam guna melihat validitas hasil simulasi bersyarat khususnya Algoritma Metropolis-Hasting pada simulasi Monte Carlo Markov Chain dalam pendeskripsian parameter reservoir kawasan eksplorasi.

Daftar Pustaka

[1] Basuki, A, Budi, S.T, dan Huda, M., 2004, *Modeling dan Simulasi*, Edisi pertama IPTAQ Mulia Media Jakarta

[2] Ross, S.M., 1997, *Simulation 2 Ed*., HP Harcourt Academic Press, San Diego California.

[3] Ross, S.M., 1996, *Stochastic Process 2 Ed*., John Wiley & Sons,Inc. New York